

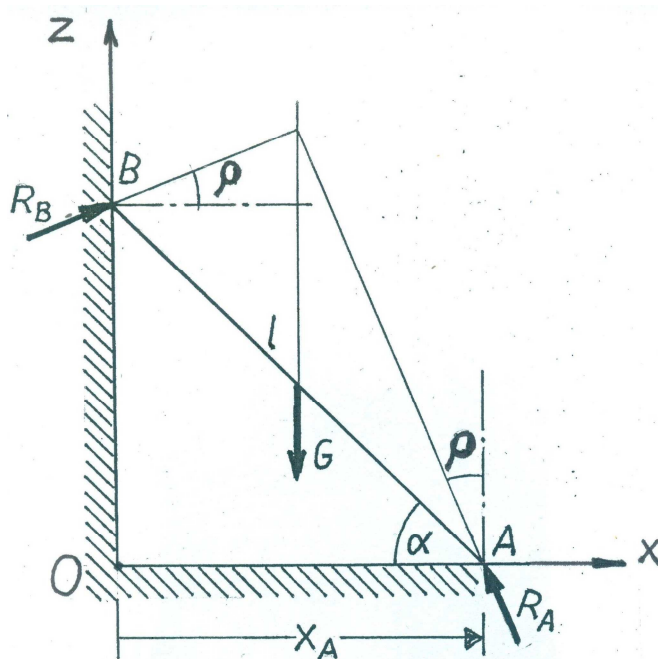
ÉRDES SÍKOKRA TÁMASZKODÓ SÚLYOS RÚD EGYENSÚLYI HELYZETEI

Legyen a címben említett két sík egy térbeli derékszögű koordináta rendszer x, y és y, z síkja, a rúd hossza l , súlya G , a nyugvásbeli súrlódás tényezője μ , a súrlódási szög ρ (egyszerűség végett mellőzve a szokásos null-indexeket).

Ha a rúd az x, z síkban helyezkedik el, mindaddig egyensúlyban van, míg az alsó A rúdvégpont koordinátája nem halad meg egy kritikus x_k értéket. A kritikus helyzetben a rúdra ható erők ábrája (1. ábra) alapján

$$\frac{x_k/2}{x_k \cdot \operatorname{tg} \alpha + \mu x_k/2} = \mu, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2\mu} - \frac{\mu}{2} = \frac{1-\mu^2}{2\mu}, \quad \cos \alpha = \frac{2\mu}{1+\mu^2},$$

$$x_k = l \cos \alpha = \frac{2\mu}{1+\mu^2} l.$$

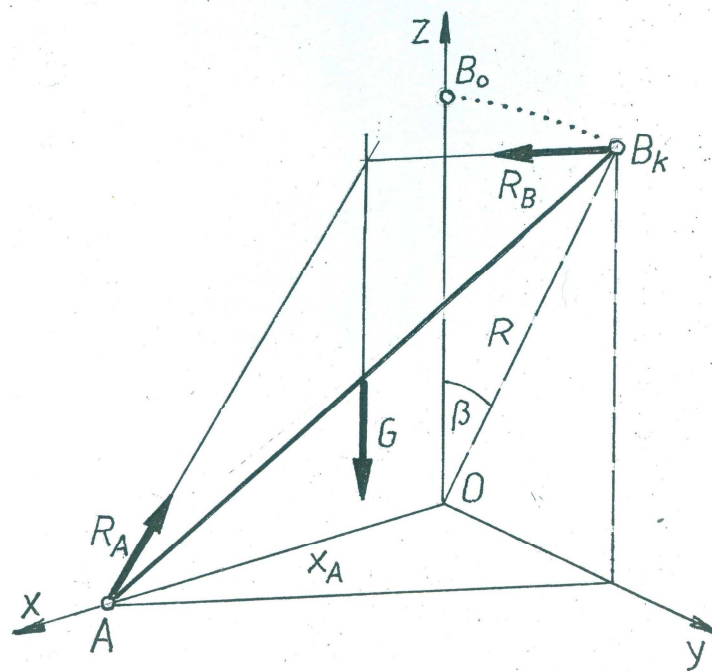


1. ábra

Ha $x_A > x_k$, akkor a rúd az x, z síkban mozogva a talajra, vagyis az x, y síkra jut. Ha $x_A < x_k$, akkor az A pont adott helyzeténél a B rúdvégpont bizonyos mértékig elmozdítható, pontosabban az x tengely körül elforgatható az y, z síkon oly módon, hogy a rúd továbbra is egyensúlyban marad. Ekkor a B pont egy O középpontú, $R = \sqrt{l^2 - x_A^2}$ sugarú kör pontja (2. ábra). Az egyensúly mindaddig fennáll, míg a B pont az említett kör $B_0 B_k$ ívének belső vagy határpontja. A kritikus B_k ponthoz tartozó rúdhelyzetben a rúdra ható erők a következők:

- G : a rúd súlya,
- R_A : a rúd alsó végén fellépő reakcióerő,

- R_B : a rúd felső végpontjára ható reakcióerő, hatásvonala a B_k csúcsú súrlódási kúp alkotója.



2. ábra

Mivel a két reakcióerő hatásvonala G hatásvonalát metszi, mindkét hatásvonal a rúd vetítősíkjában, azaz a rúdtengelyt tartalmazó, s az x,y síkra merőleges síkba esik. E tényből következik, hogy a 2. ábrán látható lehetséges legnagyobb β szöghöz tartozó B_k esetén a reakcióerő hatásvonala az x,y síkkal párhuzamos, mert csak ilyen módon teljesülhet, hogy a hatásvonal egyszerre legyen még a súrlódási kúp alkotója, s egyben a rúdtengely vetítősíkjának egyenesese. E megállapítás már módot nyújt a B_k pontnak szerkesztéssel történő meghatározására. A 3 / a (felülnézeti) ábráról leolvasható, hogy a kritikus helyzetű rúdnak az x,y síkban lévő vetülete ρ szöget zár be az x tengellyel. Ennek ismeretében az adott A ponthoz tartozó B_k pont szerkesztése a következő (3 / b ábra):

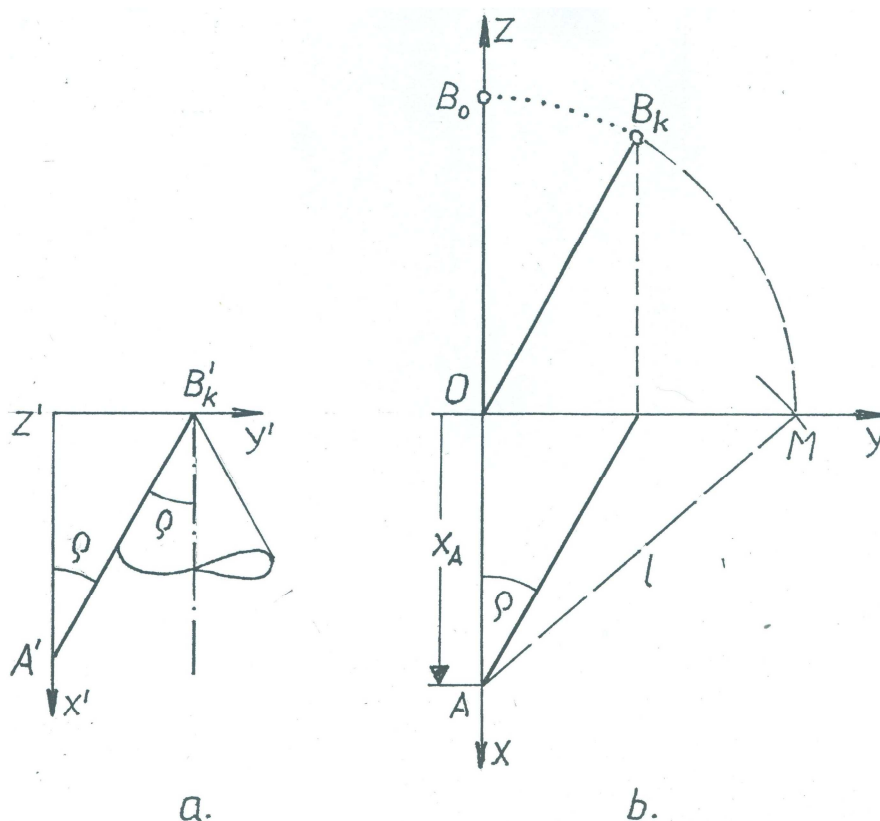
- az A középpontú, l sugarú kör az y tengelyt az M pontban metszi,
- az O középpontú, OM sugarú körön található a lehetséges, tehát még egyensúlyi helyzetet biztosító B rúdvégpontok,
- az A ponton átmenő és az x tengellyel ρ szöget bezáró egyenes az y tengelyt a keresett B_k pont vetületében metszi.

A tetszőleges, persze még x_k -nál nem nagyobb koordinátájú A helyzetekhez tartozó B_k pontok ellipszisívet alkotnak.

A 3 / b ábra szerint a B_k pontra $y = x_A \operatorname{tg} \rho = x_A \mu$, $y^2 + z^2 = R^2 = l^2 - x_A^2$,

$$y^2 + z^2 = l^2 - \frac{y^2}{\mu^2}, \text{ rendezve } \frac{y^2}{l^2 \mu^2} + \frac{z^2}{l^2} = 1, \text{ vagyis a } B_k \text{ pontok olyan ellipszis}$$

pontjai, melynek fél tengelyhosszai $a = l$ és $b = \frac{\mu l}{\sqrt{1 + \mu^2}}$.

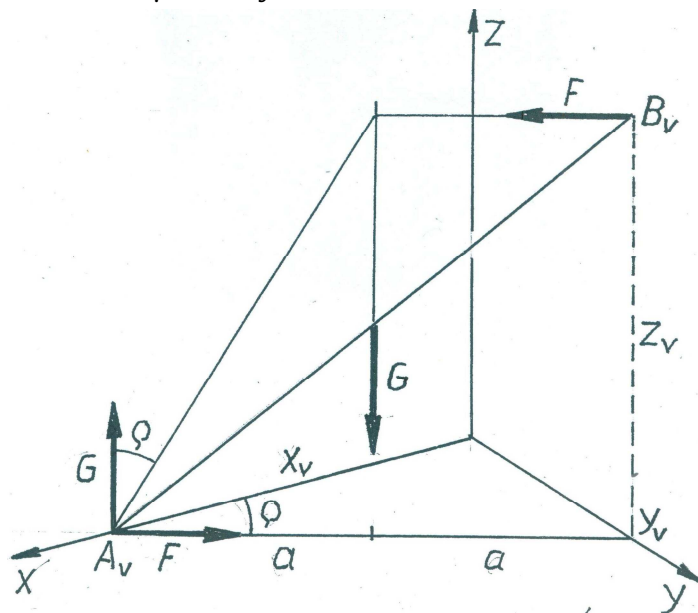


3. ábra

A fentiek csak abban az esetben érvényesek, ha a rúd A végpontjánál fellépő reakcióerő hatásvonalja az A -beli súrlódási kúpba vagy annak felületére esik. Belátható azonban, hogy ha a 2. ábrán β -val jelölt szög elegendően nagy, akkor bekövetkezik az alsó rúdvég megcsúszása. Pontosabban: létezik olyan β szög, melynél a rúd két végpontjánál egyszerre következik be a megcsúszás. Az alsó rúdvégpont veszélyes A_v helyzetének meghatározása végeztet vegyük számba a rúdra ható erőket:

- G : a rúd súlya,
- R_B : a B pontban fellépő reakcióerő, melynek – mint láttuk – hatásvonalja az x, y síkkal párhuzamos,
- R_A : az A pontban fellépő reakcióerő, melynek „vízszintes” összetevőjét F -fel jelölve és belátva, hogy „függőleges” összetevője G nagyságú, az egyensúly határán $F/G = \mu$.

A 4. ábráról leolvasható, hogy a veszélyes helyzetben a rúdra két erőpár hat: egy G - G alapú és egy F - F alapú erőpár, ahol $F/G = \mu$. Az ábra jelöléseivel $Ga = Fz_v = F\sqrt{l^2 - 4a^2}$, $F = \mu G$ helyettesítésével és rendezés után



4. ábra

$$2a = \frac{2\mu l}{\sqrt{1+4\mu^2}},$$

a veszélyes helyzethez tartozó koordináta $x_v = 2a \cos \rho$,

$$\cos^2 \rho = \frac{1}{1+\tan^2 \rho} = \frac{1}{1+\mu^2}, \quad x_v = \frac{2\mu l}{\sqrt{(1+4\mu^2)(1+\mu^2)}},$$

$$x_v = \frac{2\mu}{\sqrt{1+5\mu^2+4\mu^4}} l.$$

A felső rúdvég koordinátái a veszélyes helyzetben

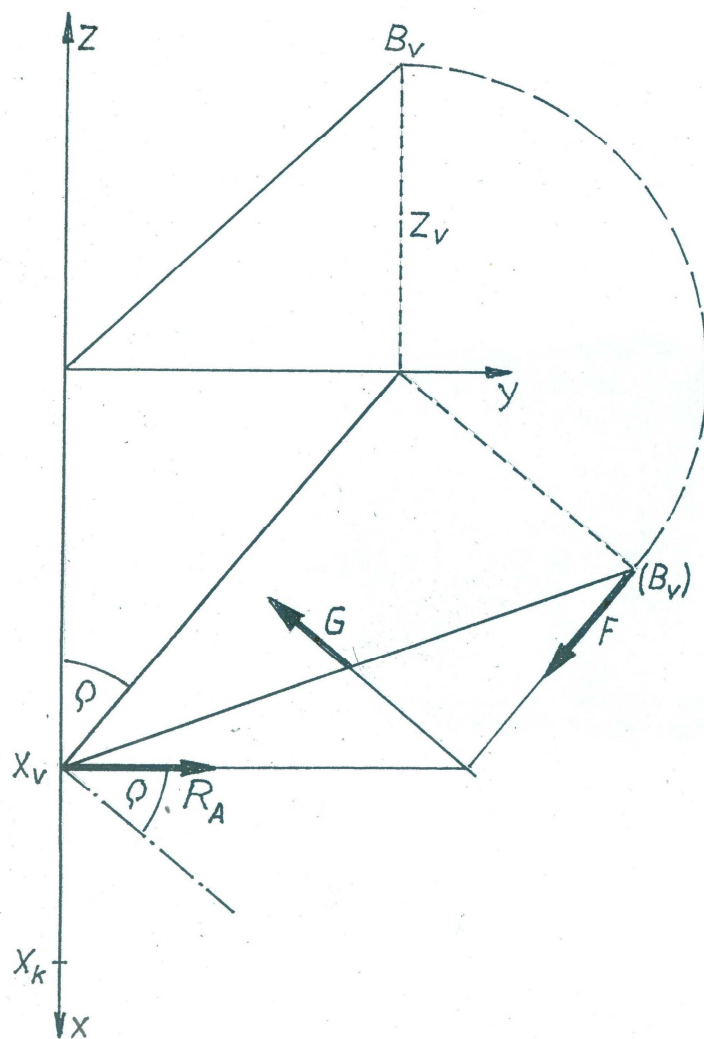
$$y_v = x_v \mu = \frac{2\mu^2}{\sqrt{1+5\mu^2+4\mu^4}} l, \quad z_v = \sqrt{l^2 - 4a^2} = \frac{l}{\sqrt{1+4\mu^2}}.$$

Példa: legyen $l = 8 \text{ m}$, $\rho = 40^\circ$, $\mu = \tan \rho = 0,839$.

A fenti képletekkel számolva

$x_k = 7,878 \text{ m}$, $x_v = 5,264 \text{ m}$, $y_v = 4,416 \text{ m}$, $z_v = 4,095 \text{ m}$.

Az 5. ábrán ellenőrizhető, hogy a reakcióerők hatásvonalai valóban a megfelelő súrlódási kúpok felületére esnek.



5. ábra

Összeállította: **Hajdu Endre**
mérnökstanár

Sopron, 2012. november 22.